

Une méthode numérique non itérative pour la détermination du régime de fonctionnement périodique des régénérateurs

R. SCARICABAROZZI

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Dpto. de Física, INTI,
P. T. Miguelete C.C., 157 1650 San Martín, Buenos Aires, Argentina

(Reçu le 10 février 1988)

Résumé—Le régime de fonctionnement périodique d'un échangeur alternatif de chaleur (régénérateur) est obtenu en utilisant une méthode matricielle tirée de la formulation du problème en différences finies.

1. INTRODUCTION

LES ÉCHANGEURS alternatifs de chaleur (régénérateurs) sont moins utilisés que les récupérateurs, mais ils ont quand même de larges applications : sidérurgie (cowpers, préchauffage des fours Siemens-Martin), préchauffeurs d'air dans les turbines à gaz, air conditionné, souffleries, réacteurs chimiques, industrie frigorifique, accumulation d'énergie solaire, etc.

Sa modélisation mathématique et son calcul ont généré une importante littérature. En effet, l'impossibilité d'arriver à un régime stationnaire dans le temps et d'éliminer cette variable, complique la tâche. Les chemins suivis pour trouver la solution sont les suivants :

(a) Formules globales approchées [1, 3] suffisantes pour des avant-projets. Elles ne donnent pas de renseignements sur la distribution des températures dans l'espace ou le temps.

(b) Solutions analytiques des équations différentielles [4, 5]. Elles acceptent des conditions initiales et de contour assez larges, mais ne permettent pas d'étudier le fonctionnement continu de l'échangeur.

(c) La solution de ce dernier problème exige de trouver les distributions de température que le fonctionnement périodique impose. C'est là le coeur des problèmes théoriques du régénérateur. Nous tâcherons de le résoudre à partir d'une formulation numérique qui évite des itérations.

2. FORMULATION DES EQUATIONS

Le fonctionnement d'un régénérateur est schématisé par la Fig. 1. Une masse solide (tubes ou "pebble bed") est parcourue alternativement par deux fluides à différentes températures, ce qui permet le transfert de chaleur d'un fluide à l'autre après accumulation dans le solide.

La façon la plus commune de formuler les équa-

tions de conservation de la chaleur en forme adimensionnelle est la suivante :

dans le fluide

$$\frac{\partial T^G(x, t)}{\partial x} = T(x, t) - T^G(x, t) \quad (1)$$

dans le solide

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = T^G(x, t) - T(x, t) \quad (2)$$

où

$$x = x/X; \quad t = t/\tau \quad (3)$$

$$X = \frac{C_G G t}{h S_v} \quad (4)$$

$$\tau = \frac{C \rho (1 - \varepsilon)}{h S_v} \quad (5)$$

avec les définitions appropriées de x et de τ , ces équations peuvent être adaptées aux tubes ou aux "pebble beds".

Les hypothèses suivantes sont impliquées :

(a) La conductivité du solide est infinie dans la direction perpendiculaire à X et nulle dans la direction parallèle.

(b) Le seul mécanisme de transfert thermique entre le fluide et le solide est la convection (le rayonnement est négligé).

(c) Les paramètres du fluide et du solide ne dépendent pas de la température.

(d) La densité du fluide est négligeable vis-à-vis de celle du solide.

La validité de ces hypothèses doit être analysée dans chaque situation.

En utilisant les transformées de Laplace, on a trouvé [5, 6] des solutions de (1) et (2) pour une température initiale arbitraire dans le solide et le fluide

NOMENCLATURE

$$T(x, t) = F(x) e^{-t} + e^{-(t+x)} \times \int_0^x e^u F(u) \sqrt{\left(\frac{x}{x-u}\right)} I_1(\sqrt{(t(x-u))}) du \quad (6)$$

avec

$$F(x) = T(x, 0).$$

3. CONDITION DE PERIODICITE

La distribution de température dans le solide à la fin d'une demi-période de refroidissement doit coïncider avec celle initiale de la demi-période de chauffage :

$$T(x, t_F) = T'(x, 0); \quad T(x, 0) = T'(x, t_F) \quad (7)$$

et en cas de flux à contre-courant

$$T(x, t_F) = T'(L-x, 0); \quad T(x, 0) = T'(L-x, t_F). \quad (8)$$

La distribution qui vérifie ces conditions peut être obtenue par deux voies.

(a) Cherchant les solutions pour une distribution initiale inconnue et imposant les conditions (7) et (8), il apparaît une équation intégrale due à la forme de la solution analytique (6). Nusselt [1] a trouvé une solution pour des demi-périodes et des débits égaux. En outre, les travaux [7, 8] suivent de façon numérique cette voie qui part de la solution analytique.

(b) Discréteur (1) et (2) et utilisant la méthode des différences finies, on peut simuler le fonctionnement du régénérateur et trouver la distribution périodique appelée "réversible" comme limite [9, 10].

(c) Une solution analytique a été trouvée par Spiga et Spiga [5] seulement pour le cas de flux parallèles, ce qui limite son intérêt.

Nous suivons une voie différente. A partir de l'expression en différences finies, on obtient une expression matricielle qui donne les distributions initiales dans l'espace et le temps. Ces matrices permettent de poser facilement la condition de réversibilité.

4. FORMULATION MATRICIELLE

4.1. Température finale du solide

On cherche à exprimer la température dans le solide à la fin du cycle comme :

$$T = \eta T_0 + \mu T_0^G \quad (9)$$

η matrice carrée, μ matrice rectangulaire, T, T_0, T_0^G vecteurs.

L'expression de (1) et (2) en différences finies avec une erreur $O(\Delta t, \Delta x)$ est :

$$T_{i,i}^G = aT_{ii} + bT_{i+1,i}^G \quad (10)$$

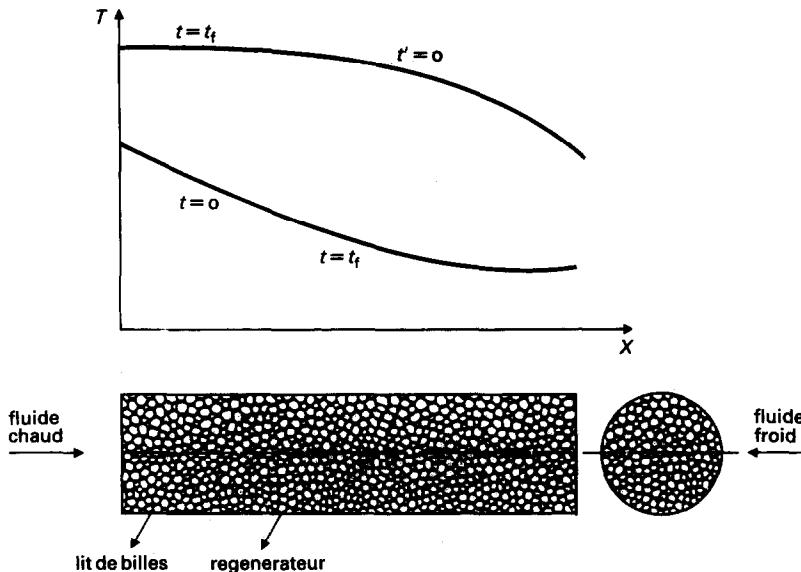


FIG. 1. Fonctionnement d'un régénératuer, distribution des températures.

$$T_{ij} = \Delta t / (1 + \Delta t) T_{i-1,j}^G + 1 / (1 + \Delta t) T_{i,j-1} \quad (11)$$

$$f_1 = \alpha c^{i-1} T_{0,1}^G \quad (21)$$

avec

$$a = \frac{\Delta x}{1 + \Delta x}; \quad b = \frac{1}{1 + \Delta x} \quad (12)$$

à partir de (17)

$$T_{(j)} \equiv T = \sum_{k=1}^j M^j T_0 \quad (22)$$

substituant (10) en (11)

$$T_{ij} = \alpha T_{i-1,j}^G + \beta T_{i,j-1} \quad (13)$$

avec

$$\alpha = \frac{\Delta t}{1 + \Delta t + \Delta x}; \quad \beta = \frac{1 + \Delta x}{1 + \Delta t + \Delta x} \quad (14)$$

substituant encore une fois (13) en (10)

$$T_{ij}^G = c T_{i-1,j}^G + ab T_{i,j-1} \quad (15)$$

avec

$$c = \alpha a + b \quad (16)$$

remplaçant jusqu'au moment où les termes T_{ik}^G avec $i > 0$ disparaissent

$$T_{ij} = \alpha c^{i-1} T_{0,j}^G + ab \alpha \sum_{p=1}^{i-1} T_{p,j-1} c^{i-p} + \beta T_{i,j-1} \quad (17)$$

qui peut s'écrire matriciellement

$$T_{(j)} = f + M T_{(j-1)} \quad (18)$$

où l'indice (j) exprime la ligne (Fig. 2). Les éléments de la matrice M sont :

$$m_{pi} = (m_1 + m_2 \delta_{ip}) c^{i-p-1} \quad (19)$$

avec

$$m_1 = \alpha \beta a; \quad m_2 = \beta (c - \alpha a) \quad (20)$$

δ_{ip} delta de Kronecker, les éléments du vecteur f

on arrive enfin (voir Appendice) à

$$\eta_{ip} = \eta_{i-p} = c^{-i-p-t} \sum_{k=0}^t m_1^{t-k} (m_1 + m_2)^k \binom{i-p}{t-k} \binom{t}{k} \quad (23)$$

$$\mu_{ik} = c^{-t-h} \sum_{k=0}^{t-h} m_1^{t-h-k} (m_1 + m_2)^k \binom{t-h}{k} \binom{i-p}{t-h-k}. \quad (24)$$

La Fig. 2 montre le sens physique des éléments des matrices : η_{i-p} indique l'influence de la température d'entrée du fluide à l'instant p , dans la température finale du solide au point i . μ_{ik} représente l'influence au même point de la température initiale du solide dans le temps k . On peut comprendre pourquoi η est un vecteur ; il dépend seulement de la distance $i-p$ et non de l'origine des coordonnées. Si $i-p < 0$, $\eta_{i-p} = 0$, c'est-à-dire que le point plus avancé n'a pas d'influence sur l'arrière.

4.2. Température de sortie du fluide

La distribution temporelle de la température de sortie du fluide est une donnée d'importance technologique ; elle peut être exprimée facilement d'une façon matricielle :

$$T^G = \varepsilon T_0^G + \lambda T_0 \quad (25)$$

effectivement on voit que les équations (1) et (2) ne varient pas si on opère les remplacements

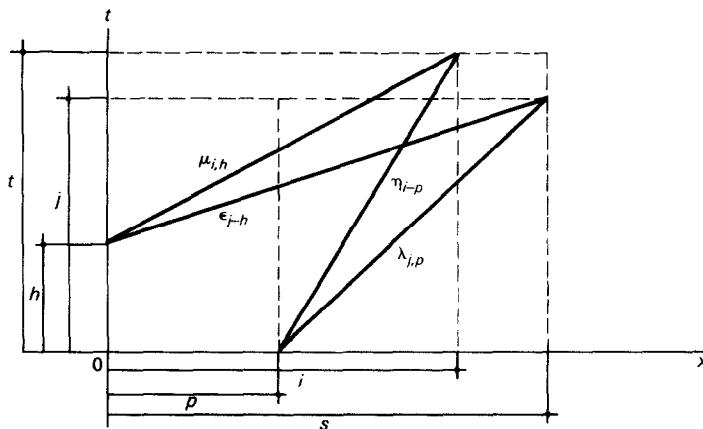


FIG. 2. Signification des matrices.

$$\begin{aligned} t \rightarrow x, \quad T \rightarrow T^G \\ x \rightarrow y, \quad T^G \rightarrow T. \end{aligned}$$

Alors ϵ peut être obtenue à partir de η en remplaçant Δx par Δt . La même relation existe entre λ et μ . Aussi le caractère vectoriel de ϵ a une explication physique : l'influence du temps p dans la température à l'instant j dépend seulement de $j-p$ et non de l'origine du temps.

4.3. Vérification

Si on chauffe un lit qui a une certaine température initiale uniforme, avec un fluide qui a la même température, la distribution spatiale ne change pas. La même chose se vérifiera avec la température de sortie du gaz.

Exprimant cette situation dans les équations (8) et (24), on aura :

$$\eta I + \mu I = I \quad (26)$$

$$\epsilon I + \lambda I = I \quad (27)$$

où I est le vecteur unité ; (26) et (27) donnent une relation utile pour vérifier si un programme de calcul qui utilise cette méthode ne contient pas des erreurs.

5. CONDITION MATRICIELLE DE PÉRIODICITÉ

Les conditions (7) ou (8) donnent :

$$T_f = T'_0; \quad T'_f = T_0. \quad (28)$$

L'apostrophe indique le refroidissement et son absence le chauffage. Donc :

$$T'_f = \eta' T'_0 + \mu' T_0^G = \eta' \eta T_0 + \eta' \mu T_0^G + \mu' T_0^G = T_0 \quad (29)$$

$$(\eta' \eta - I) T_0 = -(\eta' \mu T_0^G + \mu' T_0^G). \quad (30)$$

Le problème se réduit à la résolution d'un système linéaire.

Dans le cas de systèmes à contre-courant, tous les vecteurs et matrices doivent se référer à la même origine.

En outre, il faut remarquer que T_f et T'_0 doivent avoir la même dimension et donc :

$$L = n \Delta x' X' = n \Delta x X. \quad (31)$$

C'est-à-dire que seul un pas de calcul dans l'espace peut être choisi arbitrairement.

6. STABILITÉ ET ERREUR

Il faut se poser le problème de la stabilité de la discréétisation.

Le système (1) et (2) est hyperbolique, comme on peut le voir si on l'écrit comme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

la vitesse de propagation des ondes est $c = 1/2$, alors si on l'utilise comme critère de stabilité [11]

$$c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1 \quad (33)$$

on aura

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < 2. \quad (34)$$

On observe que pour $\Delta x = \Delta t = 0.1$, la différence avec une solution analytique est de l'ordre de 0,3%.

7. RESULTATS

On a comparé les résultats de la méthode avec des mesures faites par Hals et Keefe [12] dans un échangeur "pebble bed". Les caractéristiques de ce dispositif sont résumés à la Table 1. Les formules suivantes ont été retenues pour les calculs de X et τ [13]

Table 1

Paramètre	Symbol	Valeur
Chaleur du fluide	C_G	$1111,1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Chaleur massique du fluide	C	$1510 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Diamètre des billes	d_B	$0,0127 \text{ m}$
Masse volumique du solide	ρ	3650 kg m^{-3}
Pression estimée	p	$4,5 \times 10^5 \text{ Pa}$

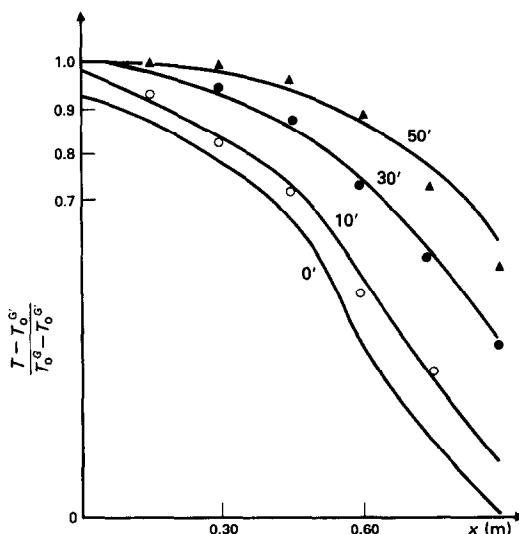


FIG. 3. Distribution des températures dans le solide; vérification des formules (23) et (24). Les points expérimentaux correspondent aux mesures de Hals et Keefe [12]: ○, 600 s; ●, 1200 s; △, 1800 s; ▲, 3000 s; $X = 0,02865$ m; $\tau = 165,37$ s.

$$\varepsilon = 0,222(1000d_B \text{ [cm]})^{0,252} \quad (35)$$

$$h_{\text{mod}}d_B = 1,85 \times 10^{-6} \text{ [J s}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ K}^{-1}] \quad (36)$$

$$S_v = \frac{6(1-\varepsilon)}{d_B} \quad (37)$$

$$h = \frac{h_{\text{mod}}}{S_v}. \quad (38)$$

Les Figs. 3 et 4 comparent les mesures de la température du lit, avec les valeurs calculées par (9). La concordance n'est pas mauvaise.

Dans la Fig. 5 est montrée une distribution tem-

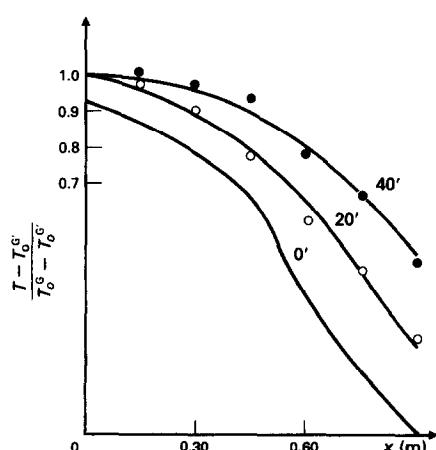


FIG. 4. Distribution des températures dans le solide; vérification des formules (23) et (24). Les points expérimentaux correspondent aux mesures de Hals et Keefe [12]: ○, 1200 s; ●, 2400 s.

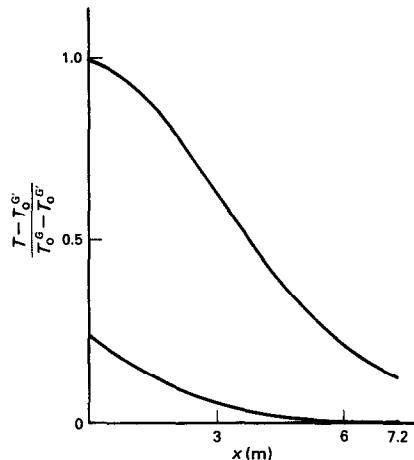


FIG. 5. Fonctionnement "réversible" du régénérateur, longueur = 7,2 m, $X = 0,2$ m, $X' = 0,3$ m, $t = 18$, $t' = 22$.

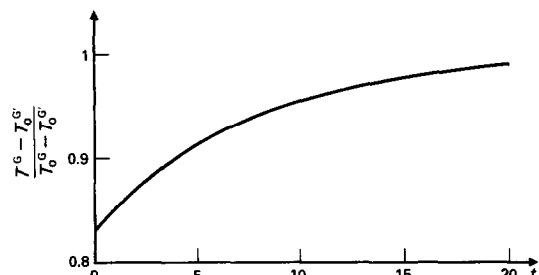


FIG. 6. Distribution temporelle de la température de sortie du fluide. $\Delta x = 0,1$, $\Delta t = 0,2$, $T(x, 0) = 2 - x$; longueur adimensionnelle = 1.

porelle de température de sortie, tirée de l'expression (25), et dans la Fig. 6 une distribution spatiale périodique obtenue avec (30).

8. CONCLUSIONS

On a trouvé une méthode matricielle pour le calcul de la distribution périodique des températures des régénérateurs qui, en même temps, conserve beaucoup de la souplesse des méthodes de simulation (température arbitraire à l'entrée) et évite les itérations. Le nombre des équations linéaires à résoudre est moitié de celui des méthodes qui partent des équations intégrales.

De plus la méthode matricielle est appropriée quand on doit étudier un régénérateur qui est incorporé, comme c'est souvent le cas, à un circuit thermique fermé.

REFERENCES

1. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. II. Wiley, New York (1965).
2. H. Hausen, Survey of the heat transfer theories in regenerators. In *Heat Exchanger Design and Theory Sourcebook* (Edited by N. Afgan and G. Schlinger). McGraw-Hill, New York (1974).
3. R. Scaricabarozzi, Uma formula global para o calculo

- de regeneradores. XI. Encontro sobre escoamento em meios porosos, Vol. 2, p. 38. Rio de Janeiro (1983).
4. W. Nusselt, Die Theorie des Winderhitzer, *Z. Ver. Dt. Ing.* 71, 85-91 (1925).
 5. G. Spiga and N. Spiga, A rigorous solution to a heat transfer two phase model in porous media and packed bed, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24, 355-363 (1981).
 6. G. Dassen and R. Scaricabarozzi, Troca de calor entre um fluido e um leito sólido de condutividade termica finita, Comunicacoes a XIV reuniao da Sociedade Brasileira de Física, p. 171-6 (1980).
 7. J. Iliffe, Thermal analysis of the counter-flow regenerative heat exchanger, *Proc. Instn Mech. Engrs* 159, 363-372 (1948).
 8. J. V. Edward and R. Evans, Computation of transient temperatures in regenerators, *Int. J. Heat Mass Transfer* 14, 1175-1202 (1971).
 9. T. J. Lambertson, Performance factors of a periodic flow heat exchanger, *Trans. ASME* 80, 586-592 (1958).
 10. A. J. Willmott, Digital computer simulation at a thermal regenerator, *Int. J. Heat Mass Transfer* 7, 1291-1302 (1964).
 11. G. Forsythe and W. Wasow, *Finite-difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley, New York (1967).
 12. F. Hals and L. Keefe, A high temperature regenerative air pre-heater for MHD power plants. In *Electricity from MHD*, Vol. 3, p. 283. Salzbourg (1966).
 13. A. V. Chehtkin, *High Temperature Carriers*. Pergamon Press, Oxford (1963).

APPENDICE

Ecrivons (18) comme :

$$T = V + W \quad (A1)$$

$$V = M^t T_0 = \eta T_0 \quad (A2)$$

$$V_i = \sum_{p=0}^i \eta_{ip} T_{0p} \quad (A3)$$

écrivons (19) comme :

$$m_{kp} = m^*(k, p) c^{k-p-1} \quad (A4)$$

de (A3), (A4) et (19), on déduit :

$$V = \sum_{l_{i-1}=0}^i \sum_{l_{i-2}=0}^{l_{i-1}} \dots \sum_{p=0}^{l_1} \prod_{k=p}^i m^*(l_k, l_{k-1}) c^{l-p-1} T_{0p} \quad (A5)$$

et de (A3) et (A5)

A NON-ITERATIVE NUMERICAL METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE PERIODICAL REGIME OF REGENERATORS

Abstract—The periodic regime of a regenerator is found using a matrix method obtained from a finite difference formulation. This approach avoids simulation processes or iterative calculations.

EINE NICHT-ITERATIVE NUMERISCHE METHODE FÜR DIE BESTIMMUNG DER PERIODISCHEN BETRIEBSBEDINGUNGEN VON REGENERATOREN

Zusammenfassung—Die periodischen Betriebsbedingungen eines Regenerators werden unter Benutzung einer Matrix-Methode, die auf einem Differenzen-Verfahren beruht, ermittelt. Durch diese Annäherung werden Simulationen oder iterative Berechnungen vermieden.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА РЕГЕНЕРАТОРОВ

Аннотация—Матричным методом, основанным на конечно-разностных формулировках, описан периодический режим регенератора. В предлагаемом методе не используются численное моделирование или итерационные расчеты.

$$\eta_{ip} = \sum_{l_{i-1}}^i \dots \sum_{l_{i-p}}^{l_1} \prod_{k=p}^i m^*(l_k, l_{k-1}) c^{l-p-1} T_{0p}. \quad (A6)$$

On vérifie que

$$i \geq l_k \geq p \quad (A7)$$

et (6A) peut être écrit comme :

$$\eta_{ip} = \sum_k n(k) m_1^{i-k} (m_1 + m_2)^k c^{i-p-k}. \quad (A8)$$

Il faut calculer $n(k)$; k est le nombre de paires d'indices consécutifs égaux qui apparaissent dans le produit de (A6). Ces paires peuvent être disposées en

$$\binom{t}{k}$$

modes différents. Chaque paire oblige à fixer un indice, les autres $t-k$ restant libres pour prendre les $i-p$ valeurs que permet (A7) donc .

$$n(k) = \binom{t}{k} \binom{i-p}{t-k} \quad (A9)$$

enfin :

$$\eta_{i-p} = \eta_{ip} = c^{i-p-t} \sum_{k=0}^t m_1^{i-k} (m_1 + m_2)^k \binom{i-p}{t-k} \binom{t}{k} \quad (A10)$$

η dépendant de $i-p$, peut être réduit à un vecteur.

En plus

$$W = \sum_{h=1}^t M^{t-h} f = \alpha \sum_{h=1}^t M^{t-h} c^{i-p} T_{0h}^G \equiv \mu T_0^G \quad (A11)$$

donc

$$\mu_{ih} = \alpha c^{i-p} M^{t-h} = \alpha \sum_{p=0}^{i-1} \eta_{ip} c^{i-p} \quad (A12)$$

$$\mu_{ih} = \sum_{p=0}^{i-1} c^{i-p-t-h} \sum_{k=0}^{t-h} m_1^{i-h-k} (m_1 + m_2)^k \binom{i-p}{t-h-k} \binom{t-h}{k} c^p \quad (A13)$$

$$\mu_{ih} = c^{i-t-h} \sum_{k=0}^{t-h} m_1^{i-h-k} (m_1 + m_2)^k \binom{t-h}{k} \sum_{p=0}^{i-1} \binom{i-p}{t-h-k} \quad (A14)$$

comme

$$\sum_{p=0}^{i-p} \binom{i-p}{t-h-k} = \sum_{s=t-h-k}^{i-1} \binom{s}{t-h-k} = \binom{i}{t-h}. \quad (A15)$$

Si $i-p < t-h-1$, la factorielle est nulle et

$$\mu_{ip} = c^{i-t-h} \sum_{k=0}^{t-h} m_1^{i-h-k} (m_1 + m_2)^k \binom{t-h}{k} \binom{i}{t-h-k}. \quad (A16)$$